

I.O. “LEONARDO DA VINCI” DI ACQUAPENDENTE

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL’ESAME DI STATO

Indirizzi: LI02 SCIENTIFICO

LI03 SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

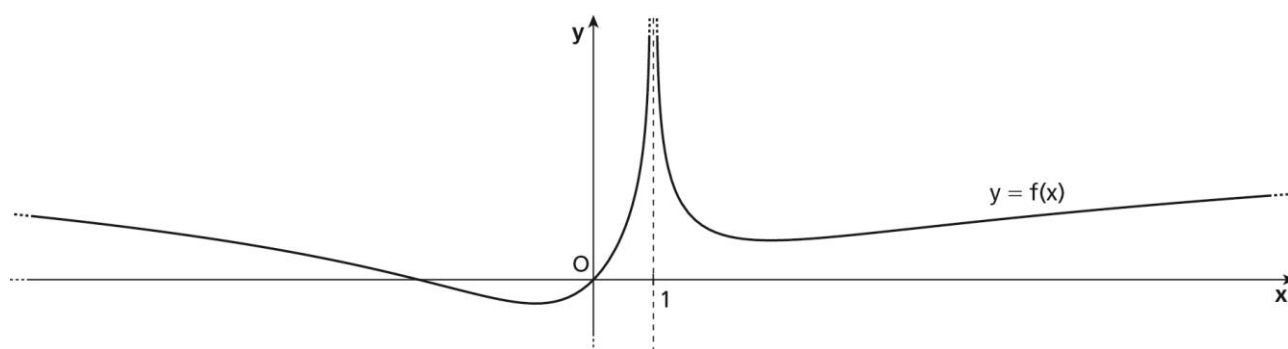
Si risolva uno dei due problemi e si risponda a 4 quesiti.

Problema 1

Il grafico γ in figura è quello della funzione

$$f(x) = \ln \frac{x^2 + a}{3|x + b|},$$

dove a e b sono parametri reali.



- Analizzando il grafico deduci, con opportune argomentazioni, i valori di a e b .
- Verificato che i valori dei parametri ottenuti al punto precedente sono $a = 3$ e $b = -1$, sostituiscili nell'equazione di $f(x)$. Determina le coordinate dei minimi relativi di $f(x)$ e le equazioni delle tangenti a γ nei punti in cui il grafico interseca l'asse x .
- Dimostra che la funzione

$$h(x) = \begin{cases} (1-x) \cdot f'(x) & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

coincide, per ogni $x \in \mathbb{R}$, con la funzione

$$g(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 + 3}.$$

Verifica che la funzione $g(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1; 3]$ e determina il punto la cui esistenza è assicurata dal teorema.

- Calcola il valore medio della funzione $g(x)$ nell'intervallo $[-1; 3]$.

Problema 2

Considera la famiglia di funzioni

$$f_a(x) = \frac{x(x-a)^2}{x^3+1}, \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

- Determina i valori di a per i quali il grafico della funzione presenta un punto stazionario in corrispondenza di $x = 2$.
- Verificato che i valori di a determinati al punto precedente sono $a = 2$ e $a = -\frac{2}{5}$, scrivi le espressioni analitiche delle due funzioni $f_2(x)$ e $f_{-\frac{2}{5}}(x)$. Studia (tralasciando l'analisi dei flessi e della concavità) e rappresenta la funzione $f_2(x)$; in particolare, dimostra che $f_2(x)$ presenta anche un massimo relativo per $x = \frac{1}{2}$. Scrivi poi l'equazione della retta r tangente in $x = 0$ al grafico di $f_2(x)$.
- Sfruttando la rappresentazione grafica della funzione $f_2(x)$, stabilisci il numero delle soluzioni dell'equazione $f_2(x) = k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- Dimostra che vale l'uguaglianza

$$\frac{25}{24} \left(f_2(x) - f_{-\frac{2}{5}}(x) \right) \cdot (x^2 - x + 1) = \frac{-5x^2 + 4x}{x + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

Posto

$$g(x) = \frac{-5x^2 + 4x}{x + 1},$$

verifica che la retta tangente in $x = 0$ al grafico di $g(x)$ coincide con la retta r . Calcola poi l'area della regione finita di piano compresa tra il grafico di $g(x)$ e l'asse x .

Quesiti

- Un'urna contiene 10 biglie, numerate da 1 a 10. Si estraggono simultaneamente 4 biglie e si sommano i numeri usciti. Andrea scommette che la somma ottenuta è pari, Barbara invece punta sul dispari. Chi fra i due amici ha la maggiore probabilità di vincere?
- Considera la superficie sferica di equazione $(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$ e il piano π di equazione $2x - y + (2-3k)z + 3(k-2) = 0$. Determina per quali valori reali del parametro k il piano π :
 - è tangente alla superficie sferica;
 - divide la superficie sferica in due parti congruenti.
- Determina il periodo T della funzione $f(x) = \sin^2 x$ e trova gli estremi relativi della funzione $g(x) = e^{f(x)}$ nell'intervallo $[0; T]$.

4. Date le funzioni

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+4t)}{t+1} dt \quad \text{e} \quad g(x) = 2x^2,$$

sia $h(x) = (F \circ g)(x)$. Calcola $h'(1)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{g(x)}$.

5. Inscrivi un rettangolo in un triangolo equilatero di lato l . Stabilisci se è vero che il rettangolo di area massima è anche quello che, ruotando attorno al suo lato contenuto in uno dei lati del triangolo, genera il cilindro di volume massimo.

6. Determina i valori dei parametri reali a e b in modo che i grafici delle funzioni

$$f(x) = \frac{3x-a}{x+1} \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - bx$$

siano tangenti tra loro in un punto A di ascissa 1. Per tali valori di a e b ricava l'equazione della retta t , tangente a entrambi i grafici nel punto A . Dimostra infine che i due grafici si incontrano in un secondo punto B .

7. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax-b}{x+1} & \text{se } -1 < x \leq 0, \\ -x^2 - bx + a - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

ricava i valori dei parametri reali a e b in modo che sia continua e derivabile in $x = 0$. Per i valori di a e b determinati stabilisci inoltre se esiste la derivata seconda di $f(x)$ in $x = 0$, motivando la risposta.

8. I *sangaku*, come quello rappresentato nella figura, sono dei rompicapi matematici giapponesi che venivano appesi come dono nei templi o nei santuari.

Il lato del quadrato $ABCD$ è lungo 5 cm. Determina la lunghezza del lato del quadrato $EFGH$ e quella del raggio r della circonferenza di centro O , tangente sia al quadrato $ABCD$, sia all'arco di circonferenza \widehat{BD} . Puoi assumere, senza dimostrarlo, che il sangaku sia simmetrico rispetto alla retta AC .

